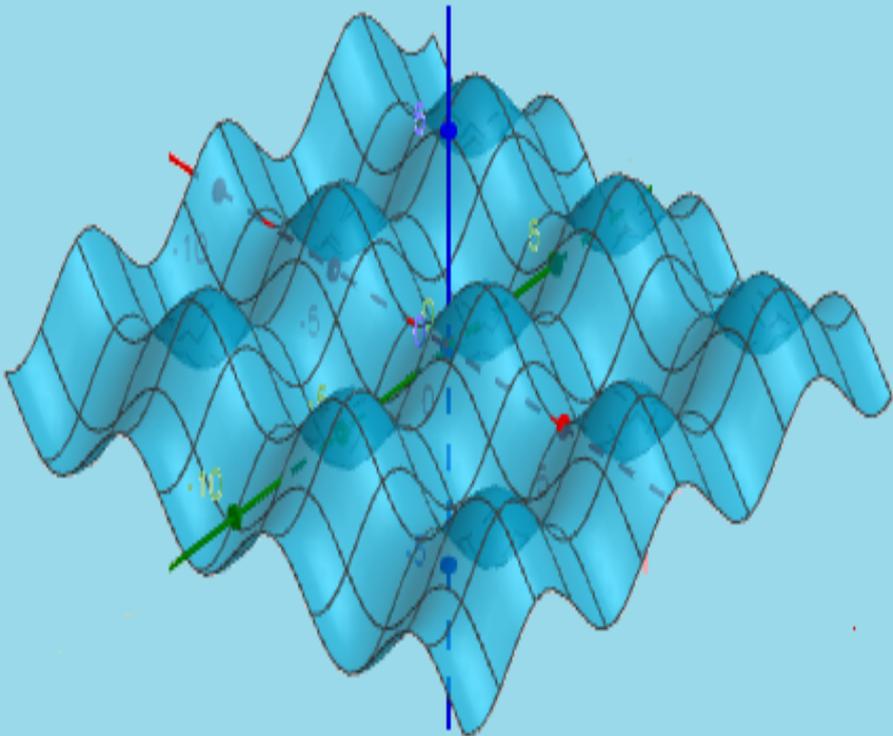


;

ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO



Elzimar de Oliveira Rufino
Kayo Denner Alves Naveca

ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO

Vol. 1

Elzimar de Oliveira Rufino
Kayo Denner Alves Naveca



Boa Vista – RR
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA – UFRR

REITOR

José Geraldo Ticianeli

VICE-REITOR

Silvestre Lopes da Nóbrega

EDITORA DA UFRR

Diretor da EDUFRR

Fábio Almeida de Carvalho

CONSELHO EDITORIAL

Alcir Gursen de Miranda

Anderson dos Santos Paiva

Bianca Jorge Sequeira Costa

Fabio Luiz de Arruda Herrig

Georgia Patrícia Ferko da Silva

Guido Nunes Lopes

José Ivanildo de Lima

José Manuel Flores Lopes

Luiza Câmara Beserra Neta

Núbia Abrantes Gomes

Rafael Assumpção Rocha

Rickson Rios Figueira

Rileuda de Sena Rebouças



Editora da Universidade Federal de Roraima
Campus do Paricarana – Av. Cap. Ene Garcez, 2413,
Aeroporto – CEP: 69.310-000. Boa vista – RR – Brasil
E-mail: editora@ufr.br

A Editora da UFRR é filiada à:



Copyright © 2021
Editora da Universidade Federal de Roraima

Todos os direitos reservados ao autor, na forma da Lei.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei n. 9.610/98) e é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Projeto Gráfico e Capa

Elzimar de Oliveira Rufino

Imagem da Capa

Elzimar de Oliveira Rufino

Diagramação

Edwin Pedro López Bambarén

Revisão Técnica

Joselito Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

R926e Rufino, Elzimar de Oliveira.

Espaços vetoriais do tipo gráfico / Kayo Denner Alves Naveca. – Boa Vista:
Editora da UFRR, 2021-

33p. : il.

Inclui Bibliografia.

ISBN: 978-65-5955-017-3

Livro eletrônico (e-book).

1 - Matemática. 2 - Cálculo. 3 - Álgebra. I - Título. II - Rufino, Elzimar de Oliveira. III - Naveca, Kayo Denner Alves. IV - Universidade Federal de Roraima. V - Departamento de Matemática - UFRR.

CDU - 51

Ficha Catalográfica elaborada pela: Bibliotecária/Documentalista:
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453 – AM

A exactidão das informações, conceitos e opiniões é de exclusiva responsabilidade dos autores.

O texto deste livro foi avaliado e aprovado por pareceristas ad hoc.

AGRADECIMENTO

Registramos nossos agradecimentos ao Professor Joselito de Oliveira-UFRR pelas valiosas sugestões e correções, ao professor Max Ferreira-UFRR por sempre se dispor às discussões sobre o assunto e ao professor Clebes da Silva Brandão-UFAC pelas sugestões.

SUMÁRIO

1	Preliminares	4
1.1	PRODUTO INTERNO	6
1.2	PROJEÇÕES CANÔNICAS	8
1.3	RETAS EM ESPAÇOS VETORIAIS	9
2	ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO	12
2.1	ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO: RESULTADOS E EXEMPLOS	12
2.2	NOVAS ESTRUTURAS DE ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO	20
3	SUBESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO E ORTOGONALIDADE	27
3.1	SUBESPAÇOS ORTOGONAIS	35

APRESENTAÇÃO

Neste livro texto apresentamos novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico, isto é, espaços vetoriais que são gráficos de certas aplicações. É um trabalho que possui como base a dissertação de Kayo Denner Alves Naveca defendida no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT-UFRR em 18 de março de 2021. O texto original sofreu algumas alterações ou acréscimos de novos exemplos. Com relação aos exemplos que propomos, o único que conhecíamos é uma estrutura unidimensional no gráfico de uma parábola, no conjunto ambiente \mathbb{R}^2 . Nossos exemplos generalizam a ideia para um gráfico de uma aplicação cujo domínio é um espaço vetorial e contradomínio em um conjunto não-vazio. Para efeitos ilustrativos, nossos exemplos se concentrarão nos casos em que o domínio é \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 . Além disso, mostramos também que o gráfico de tais aplicações pode ser dotado de várias estruturas de espaços vetoriais. Em particular, é possível munir o gráfico com uma estrutura de espaço vetorial na qual o vetor nulo pode ser qualquer elemento pré-fixado. Exploramos também o conceito de retas em espaços vetoriais utilizando uma abordagem similar àquela utilizada nos espaços vetoriais \mathbb{R}^n canônicos. Com esta ideia, podemos olhar os subespaços unidimensionais de um espaço vetorial do tipo gráfico como sendo uma retas que passa pela origem, embora esses entes, do ponto de vista geométrico usual, não são retas como estamos acostumados a visualizar. Por exemplo, podemos olhar o conjunto \mathbb{R}^2 dotado de uma nova estrutura na qual o gráfico de uma função do terceiro grau é um subespaço do ambiente e, além disso, visto como uma reta do ponto de vista da nova estrutura. Por fim, definimos um produto interno em espaços vetoriais tipo gráfico, induzido por um produto interno no domínio de uma aplicação. Como consequência exemplificamos algumas situações envolvendo subespaços ortogonais em espaços vetoriais do tipo gráfico.

Os autores¹²

¹Elzimar de O. Rufino é professor efetivo do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima.

²Kayo Denner A. Naveca é professor da Fundação Bradesco - Roraima

INTRODUÇÃO

Conforme ressalta DORIER (1995), a teoria axiomática dos espaços vetoriais é uma conquista recente da matemática e muito embora Giuseppe Peano tivesse dado a primeira definição axiomática de um espaço vetorial em 1888, a teoria não foi realmente desenvolvida antes de 1920. Atualmente a teoria dos espaços vetoriais é essencial em muitas subáreas da própria matemática bem como em outras áreas do conhecimento. Podemos citar, por exemplo, a geometria diferencial que se apropria de um espaço vetorial tangente em cada ponto de uma variedade para desenvolver seus resultados. Embora a teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita esteja bem desenvolvida, novas perspectivas possuem grande relevância em sua compreensão.

Recentemente, LOPES (2018) construiu exemplos interessantes de espaços vetoriais considerando bijeções com um espaço vetorial inicial. Nosso trabalho trata, especificamente, de espaços vetoriais construídos sobre gráficos de aplicações e é uma contribuição a mais na teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita.

No Capítulo 1 apresentamos alguns requisitos necessários para o entendimento dos capítulos posteriores. Recordamos a definição dos espaços \mathbb{R}^n e apresentamos o conceito de gráfico de uma aplicação, essencial em nosso trabalho. Além disso, também recordamos os conceitos de produto interno, projeções e damos uma definição de retas em espaços vetoriais.

No Capítulo 2 constam os exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. Nele enunciamos e provamos um teorema que fornece a estrutura de espaço vetorial a ser considerada no gráfico de aplicações cujo domínio são espaços vetoriais de dimensão finita. Os exemplos construídos são de espaços unidimensionais (nos ambientes \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 e bidimensionais (no ambiente \mathbb{R}^3). Os exemplos podem ser estendidos a maiores dimensões, no entanto, nestes casos perdemos a noção geométrica.

No Capítulo 3, tratamos de subespaços vetoriais do tipo gráfico. Destacamos que os subespaços dos espaços vetoriais \mathbb{R}^n canônicos, são subespaços do tipo gráfico, sendo assim, casos particulares dos exemplos que construímos. Além disso, introduzimos uma noção de produto interno nos espaços

do tipo gráfico e estudamos a ortogonalidade em alguns casos particulares.

Além dos exemplos apresentados pelos autores RUFINO (2021) e NAVECA (2021), acrescentamos outros de forma inédita. Com isso, fornecemos mais uma fonte de consulta aos que estudam a teoria básica da álgebra linear e em particular, aos cursos de álgebra linear da graduação em matemática ou ciências exatas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns pré-requisitos matemáticos necessários para uma melhor compreensão dos exemplos que pretendemos expor neste trabalho.

Vamos começar essa seção recordando a definição de corpo. O leitor poderá consultar (GONÇALVES, 2000) para mais detalhes.

Definição 1.1 (Corpo)

Seja K um conjunto não vazio no qual estão definidas duas operações $+$ e \cdot (chamadas adição e multiplicação). Diz-se que $(K, +, \cdot)$ é um corpo se satisfizer as seguintes condições:

A1- $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in K;$

A2- $x + y = y + x, \forall x, y, z \in K;$

A3- Existe um único $0 \in K$ tal que $x + 0 = x, \forall x \in K;$

A4- Para cada $x \in K$, existe um único $-x \in K$ tal que $x + (-x) = 0.$

M1- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in K;$

M2- $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in K;$ M3- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in K;$

M4- Existe um único $1 \in K$ tal que $x \cdot 1 = x, \forall x \in K;$

M5- Para cada $x \in K - \{0\}$, existe um único $x^{-1} \in K$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1.$



Exemplo 1.1 Exemplos bem conhecidos de corpos são: o corpo dos números reais \mathbb{R} e o corpo dos números complexos \mathbb{C} .

A seguir damos a definição de um espaço vetorial¹. O leitor pode consultar as referências (LIMA, 2014) e (RORRES, 2012) para mais detalhes.

¹As primeiras ideias sobre o conceito de espaços vetoriais surgiram no século XVII e estão associadas aos progressos relativos à geometria analítica, matrizes, sistemas de equações lineares e vetores no plano euclidiano. Historicamente, Giuseppe Peano formulou pela primeira vez o conceito em 1888

Definição 1.2 (Espaços vetoriais)

Um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} é constituído de um conjunto não-vazio E munido de uma operação de adição

$$+ : E \times E \longrightarrow E \\ (u,v) \longmapsto u+v$$

e uma operação de multiplicação por escalar

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda,u) \longmapsto \lambda \cdot u$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *Associatividade* : $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todos $u, v, w \in E$.
2. *Comutatividade*: $u + v = v + u$, para todos $u, v \in E$.
3. *Existe um elemento* $0 \in E$, tal que $u + 0 = u$, para todo $u \in E$.
4. *Para cada* $u \in E$, existe um elemento $-u \in E$ tal que $u + (-u) = 0$.
5. *Associatividade*: $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para todo $u \in E$.
6. *Distributividade*: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para todo $u \in E$.
7. *Distributividade*: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todos $u, v \in E$.
8. *Multiplicação pela unidade*: $1 \cdot u = u$, para todo $u \in E$.



Um *subespaço vetorial* de um espaço vetorial E é constituído de um subconjunto $W \neq \emptyset$ de E que também possui estrutura de espaço vetorial com as operações induzidas pelas operações de E . Como consequência, temos que W é subespaço vetorial de E se são satisfeitas as seguintes condições:

1. W é não-vazio.
2. $u + v \in W$, para todos $u, v \in W$.
3. $\alpha \cdot u \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $u \in W$.

Neste trabalho, salvo menção em contrário, iremos considerar apenas

espaços vetoriais de dimensão finita. Além disso, o corpo dos escalares \mathbb{K} , será o corpo dos números reais \mathbb{R} .

Exemplo 1.2 Os espaços $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ com as operações definidas por

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)\end{aligned}$$

são exemplos bem conhecidos de espaços vetoriais de dimensão finita.

Vamos nos referir aos espaços do Exemplo 1.2 como os espaços \mathbb{R}^n canônicos.

Um conceito essencial neste trabalho é o de gráfico de uma aplicação. A respeito desse conceito temos a seguinte definição.

Definição 1.3 (Gráfico)

Sejam E um espaço vetorial real, X um conjunto não-vazio e $T : E \rightarrow X$ uma aplicação. O gráfico de T é, por definição, o conjunto

$$G(T) = \{(u, v) \in E \times X; u \in E \text{ e } v = T(u)\}.$$



Exemplo 1.3 Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $T(x) = 2x$. O gráfico de T é dado por

$$G(T) = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Neste trabalho veremos que retas que não passam pelo ponto $(0, 0, \dots, 0)$ do \mathbb{R}^n , podem ser dotadas de uma estrutura de espaço vetorial, porém perdem a propriedade de serem subespaços do espaço \mathbb{R}^n canônico. No entanto, ressaltamos que, neste caso, a propriedade de ser subespaço pode ser recuperada através de uma nova estrutura.

1.1 PRODUTO INTERNO

Em nosso trabalho necessitaremos do conceito de produto interno de vetores em um espaço vetorial.

Definição 1.4 (Produto interno)

Um produto interno definido em um espaço vetorial E sobre o corpo dos escalares \mathbb{R} é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in E;$
- ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E;$
- iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in E;$
- iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle > 0$ se e só se $u \neq 0$.



Exemplo 1.4 No espaço vetorial \mathbb{R}^n canônico, isto é, com as operações usuais definidas no Exemplo 1.2, o produto interno (usual) é dado por

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Como um caso particular, se $u = (1, 1, 2)$ e $v = (-1, -1, 1)$ são vetores em \mathbb{R}^3 , então

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0.$$

Se o produto interno de dois vetores é igual a zero, dizemos que os vetores são ortogonais.

Definição 1.5 (Subespaços ortogonais)

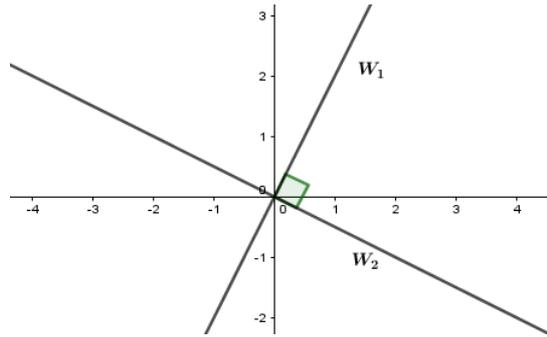
Sejam E um espaço vetorial com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W_1 e W_2 subespaços vetoriais de E . Dizemos que W_1 é ortogonal a W_2 quando $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ para quaisquer $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Para indicar que W_1 é ortogonal a W_2 utiliza-se a notação $W_1 \perp W_2$.



Exemplo 1.5 Os subespaços $W_1 = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(t, -\frac{t}{2}); t \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 são ortogonais considerando-se o produto interno usual. Essa situação está descrita na Figura 1.1.

De fato: basta ver que se $u = (x, 2x) \in W_1$ e $v = (t, -\frac{t}{2}) \in W_2$, então $\langle u, v \rangle = \langle (x, 2x), (t, -\frac{t}{2}) \rangle = xt + 2x(-\frac{t}{2}) = 0$.

Uma das vantagens de se obter subespaços ortogonais é a possibilidade usá-los para escrever o espaço como uma soma direta. É claro que,

Figura 1.1: Subespaços ortogonais no \mathbb{R}^2 canônico

Fonte: Autores

por definição, devemos exigir também que a interseção dos subespaços contenha somente o vetor nulo. No exemplo anterior, podemos escrever $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$, onde $W_1 \oplus W_2 = \{w_1 + w_2; w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$.

1.2 PROJEÇÕES CANÔNICAS

Dados os conjuntos não-vazios A_1, A_2, \dots, A_n define-se a i -ésima projeção (ou projeção no i -ésimo fator) $\pi_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n \rightarrow A_i$ pondo

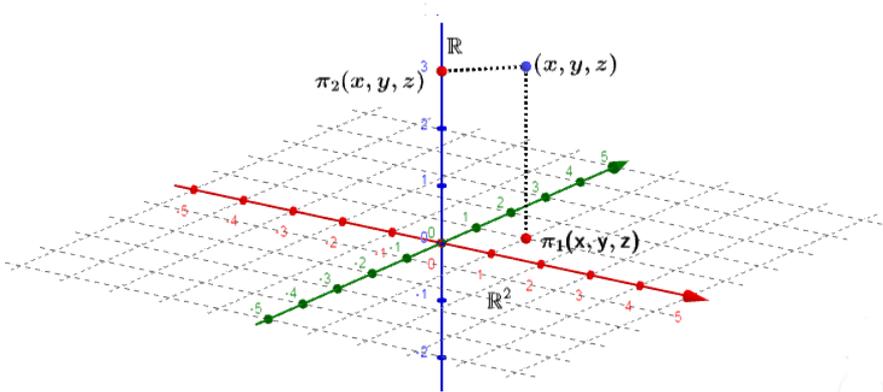
$$\pi_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i.$$

Exemplo 1.6 Se $A_1 = \mathbb{R}^2$ e $A_2 = \mathbb{R}$ então, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas, respectivamente, por $\pi_1((x, y), z) = (x, y)$ e $\pi_2((x, y), z) = z$. Veja a Figura 1.2.

Na Figura 1.2 estamos identificando \mathbb{R}^2 com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e \mathbb{R}^3 com $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Essa identificação² é feita de modo natural pondo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associado com $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associado com $((x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

²Essas identificações são casos particulares dos isomorfismos entre espaços vetoriais, isto é, transformações lineares bijetivas. Nestes casos, os espaços são ditos isomorfos.

Figura 1.2: Projeções canônicas



Fonte: Autores

1.3 RETAS EM ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta seção trataremos de uma definição de reta em espaços vetoriais. Recordamos que, no espaço \mathbb{R}^n canônico, a reta r que passa pelos pontos A e B é dada por $r = \{(1-t)A + tB; t \in \mathbb{R}\}$. Além disso, como podemos ver na Figura 1.3, (LIMA, 2014), fornece uma definição similar para segmentos de retas em espaços vetoriais.

Figura 1.3: Definição de segmento de reta em espaços vetoriais

1.18. Sejam E um espaço vetorial e $u, v \in E$. O *segmento de reta* de extremidades u, v é, por definição, o conjunto

$$[u, v] = \{(1-t)u + tv; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Fonte: LIMA 2014

Em consonância com esta ideia, fazendo $t \in \mathbb{R}$, temos a seguinte definição para retas em espaços vetoriais.

Definição 1.6 (Retas)

Em um espaço vetorial $(E, +, \cdot)$, a reta r que contém os vetores u e v de E é, por definição, o subconjunto $r = \{(1 - t) \cdot u + t \cdot v; t \in \mathbb{R}\}$. ♣

Exemplo 1.7 Para este exemplo vamos utilizar um espaço vetorial mencionado na referência (WINTERLE, 1987).

Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y > 0\}$ com as operações \oplus de adição e \odot de multiplicação por escalar dadas por

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \tag{1.1}$$

$$\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, y^\alpha). \tag{1.2}$$

Pela Definição 1.6 um ponto da reta r que passa pelos pontos $R(a, b)$ e $S(c, d)$ em V possui a forma

$$(1 - t) \odot (a, b) \oplus t \odot (c, d) = (a^{1-t}, b^{1-t}) \oplus (c^t, d^t) = (a^{1-t} \cdot c^t, b^{1-t} \cdot d^t)$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$r = \{(a^{1-t} \cdot c^t, b^{1-t} \cdot d^t); t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.3}$$

Vejam os três situações particulares:

Caso 1: os pontos R e S possuem a mesma abscissa. Os pontos da reta r que passa pelos pontos $R(2, 3)$ e $S(2, 4)$ possuem a forma $(2, 3^{1-t} \cdot 4^t)$. Neste caso, um segmento de reta de V coincide com um segmento de reta de \mathbb{R}^2 .

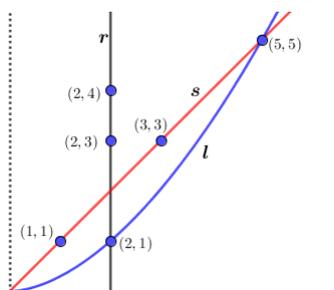
Caso 2: os pontos R e S possuem a mesma abscissa e a mesma ordenada. Os pontos da reta s que passa pelos pontos $R(1, 1)$ e $S(3, 3)$ tem a forma $(1^{1-t} \cdot 3^t, 1^{1-t} \cdot 3^t) = (3^t, 3^t)$. Neste caso, um segmento de reta de V coincide com um segmento de reta de \mathbb{R}^2 .

Caso 3: os pontos R e S possuem abscissas e ordenadas diferentes. Os pontos da reta l que passa pelos pontos $R(2, 1)$ e $S(5, 5)$ tem a forma $(2^{1-t} \cdot 5^t, 5^t)$. Neste caso, um segmento de reta de V não coincide com um segmento de reta de \mathbb{R}^2 . Veja na Figura 1.5 a descrição geométrica dos segmentos de retas³

³No contexto das geometrias não-euclidianas a ideia de reta toma um outro sentido. Por

dessas situações.

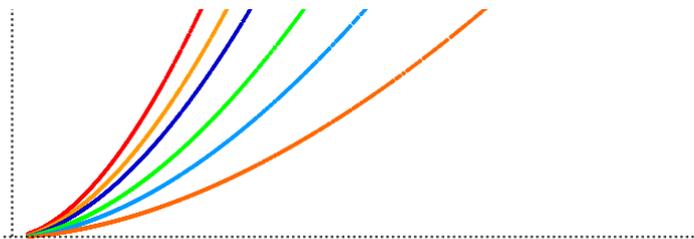
Figura 1.4: Retas no espaço V



Fonte: Autores

Usando translações podemos obter uma sequência de retas paralelas em V . Por exemplo, a equação $r(s) = (2^{1-t} \cdot 5^t, 5^t) \oplus (1, s) = (2^{1-t} \cdot 5^t, s \cdot 5^t)$ com $t \in \mathbb{R}$, fornece para cada $s \in \mathbb{R}$ uma reta paralela à reta l ilustrada na Figura 1.5. Na Figura ... temos uma ideia de como se comportam essas retas.

Figura 1.5: Retas paralelas em V



Fonte: Autores

exemplo, na geometria da esfera as retas são círculos máximos. Quaisquer dois desses círculos se intersectam e portanto na geometria esférica não existem retas paralelas.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO

Neste capítulo apresentamos resultados que permitem a construção de exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. Conforme já mencionamos, o único exemplo que conhecíamos era a estrutura de espaço vetorial na parábola, que pode ser visto em (WINTERLE, 1987).

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO: RESULTADOS E EXEMPLOS

Nesta seção apresetamos um resultado essencial em nosso trabalho. Esse primeiro resultado mostra como colocar uma estrutura de espaço vetorial no gráfico de uma aplicação $T : E \rightarrow X$, onde E é um espaço vetorial e X um conjunto não-vazio. É o que consta no seguinte teorema.

Teorema 2.1

Sejam E um espaço vetorial n -dimensional, X um conjunto não-vazio e $T : E \rightarrow X$ uma aplicação. Então, o gráfico de T possui uma estrutura de espaço vetorial n -dimensional.



Demonstração Dados $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, utilizaremos as notações $u + v$ e λu para indicar a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, em E . Além disso, os símbolos \oplus e \odot serão utilizados, respectivamente, para denotar a adição e a multiplicação por escalar em $G(T)$. A operação de adição $\oplus : G(T) \times G(T) \rightarrow G(T)$ e a de multiplicação por escalar $\odot : \mathbb{R} \times G(T) \rightarrow G(T)$ serão definidas por

$$\begin{aligned}(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) &= (u + v, T(u + v)) \\ \lambda \odot (u, T(u)) &= (\lambda u, T(\lambda u)).\end{aligned}$$

Vamos verificar que são satisfeitas as oito condições de espaço vetorial.

Dados $\mathbf{u} = (u, T(u))$, $\mathbf{v} = (v, T(v))$, $\mathbf{w} = (w, T(w)) \in G(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

1. Associatividade:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) &= (u, T(u)) \oplus ((v, T(v)) \oplus (w, T(w))) \\
 &= (u, T(u)) \oplus ((v + w), T(v + w)) \\
 &= (u + (v + w), T(u + (v + w))) \\
 &= ((u + v) + w, T((u + v) + w)) \\
 &= (u + v, T(u + v)) \oplus (w, T(w)) \\
 &= ((u, T(u)) \oplus (v, T(v))) \oplus (w, T(w)) \\
 &= [\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}] \oplus \mathbf{w}.
 \end{aligned}$$

2. Comutatividade

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= (u, T(u)) \oplus (v, T(v)) \\
 &= (u + v, T(u + v)) \\
 &= (v + u, T(v + u)) \\
 &= (v, T(v)) \oplus (u, T(u)) \\
 &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

3. O elemento nulo é dado por $\mathbf{0} = (0, T(0)) \in G(T)$. De fato:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} \oplus (u, T(u)) &= (0, T(0)) \oplus (u, T(u)) \\
 &= (0 + u, T(0 + u)) = (u, T(u))
 \end{aligned}$$

4. O simétrico do elemento $\mathbf{u} = (u, T(u)) \in G(T)$ é dado por $-\mathbf{u} = (-u, T(-u))$. De fato:

$$\begin{aligned}
 (u, T(u)) \oplus (-u, T(-u)) &= (u + (-u), T(u + (-u))) \\
 &= (0, T(0)) = \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

5. Associatividade

$$\begin{aligned}
 (\alpha.\beta) \odot \mathbf{u} &= (\alpha.\beta) \odot (u, T(u)) \\
 &= ((\alpha.\beta).u, T((\alpha.\beta).u)) \\
 &= (\alpha.(\beta.u), T(\alpha.(\beta.u))) \\
 &= \alpha \odot (\beta.u, T(\beta.u)) \\
 &= \alpha \odot (\beta \odot (u, T(u))) \\
 &= \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

6. Distributividade

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} &= (\alpha + \beta) \odot (u, T(u)) \\
 &= ((\alpha + \beta).u, T((\alpha + \beta).u)) \\
 &= (\alpha.u + \beta.u, T(\alpha.u + \beta.u)) \\
 &= (\alpha.u, T(\alpha.u)) \oplus (\beta.u, T(\beta.u)) \\
 &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \beta \odot (u, T(u)) \\
 &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

7. Distributividade

$$\begin{aligned}
 \alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \alpha \odot ((u, T(u)) \oplus (v, T(v))) \\
 &= \alpha \odot (u + v, T(u + v)) \\
 &= (\alpha.(u + v), T(\alpha.(u + v))) \\
 &= (\alpha.u + \alpha.v, T(\alpha.u + \alpha.v)) \\
 &= (\alpha.u, T(\alpha.u)) \oplus (\alpha.v, T(\alpha.v)) \\
 &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \alpha \odot (v, T(v)) \\
 &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

8. Multiplicação pela unidade

$$\begin{aligned}
 1 \odot u &= 1 \odot (u, T(u)) \\
 &= (1.u, T(1.u)) \\
 &= (u, T(u)) \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

Para encerrar a prova, vamos mostrar que se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de E então $B = \{(v_1, T(v_1)), (v_2, T(v_2)), \dots, (v_n, T(v_n))\}$ é uma base de $G(T)$. De fato: Se a_1, a_2, \dots, a_n são números reais tais que

$$a_1 \odot (v_1, T(v_1)) \oplus \dots \oplus a_n \odot (v_n, T(v_n)) = 0,$$

então

$$(a_1 v_1, T(a_1 v_1)) \oplus \dots \oplus (a_n v_n, T(a_n v_n)) = 0,$$

ou seja,

$$(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) = 0.$$

Segue imediatamente que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$. Como o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente em E , segue que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Logo, B é um conjunto linearmente independente. Por outro lado, como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de E , dado $v \in E$ existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (v, T(v)) &= (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) \\
 &= (a_1 v_1, T(a_1 v_1)) \oplus \dots \oplus (a_n v_n, T(a_n v_n)) \\
 &= a_1 \odot (v_1, T(v_1)) \oplus \dots \oplus a_n \odot (v_n, T(v_n)).
 \end{aligned}$$

Isso mostra que B gera $G(T)$. Assim, B é um conjunto linearmente independente que gera $G(T)$, possuindo n elementos, como queríamos mostrar.

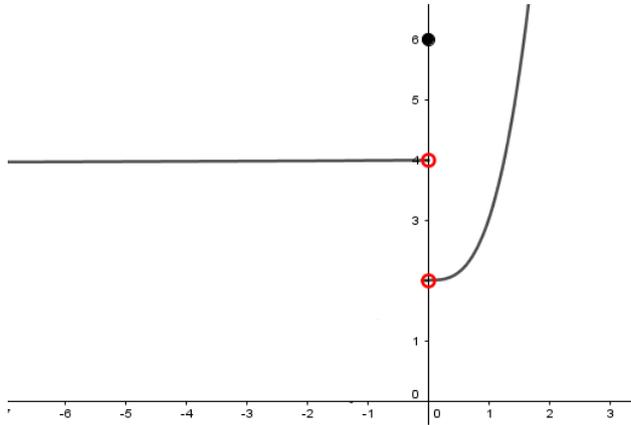
Exemplo 2.1 O conjunto $W = \{(x, 4); x < 0\} \cup \{(0, 6)\} \cup \{(x, x^3 + 2); x > 0\}$, pode ser dotado com a estrutura de espaço vetorial dada pelo Teorema

2.1. Basta ver que $W = G(T)$, onde $T : \mathbb{R} \rightarrow]2, +\infty[$ é a função tal que

$$T(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x < 0 \\ 6, & \text{se } x = 0 \\ x^3 + 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Na Figura 2.1 temos uma descrição geométrica de W . Qualquer elemento do

Figura 2.1: Descrição geométrica de W .



Fonte: Autores

tipo $(x, T(x))$ com $x \neq 0$ constitui uma base desse espaço vetorial. O vetor nulo do espaço é o elemento $(0, 6)$, o simétrico do vetor $u = (x, 4)$ com $x < 0$, é o elemento $-u = (-x, T(-x)) = (-x, -x^3 + 2)$. Além disso, se $\lambda > 0$ então

$$\lambda \odot (x, 4) = (\lambda x, f(\lambda x)) = (\lambda x, 4)$$

e

$$\lambda \odot (x, x^3 + 2) = (\lambda x, \lambda^3 x^3 + 2).$$

Se $\lambda < 0$, temos que

$$\lambda \odot (x, 4) = (\lambda x, \lambda^3 x^3 + 2)$$

e

$$\lambda \odot (x, x^3 + 2) = (\lambda x, 4).$$

Em particular, $-(-2, 4) = (2, 10)$, $5 \odot (-3, 4) = (-15, 4)$, e $-2 \odot (-1, 4) = (2, 10)$.

Corolário 2.1

Seja $T : E \rightarrow X$ uma aplicação do espaço vetorial E no conjunto não vazio X e $\varphi : X \rightarrow X$ uma aplicação. Então,

$$W = \{(v, (\varphi \circ T)(v)); v \in E\}$$

possui uma estrutura de espaço vetorial.



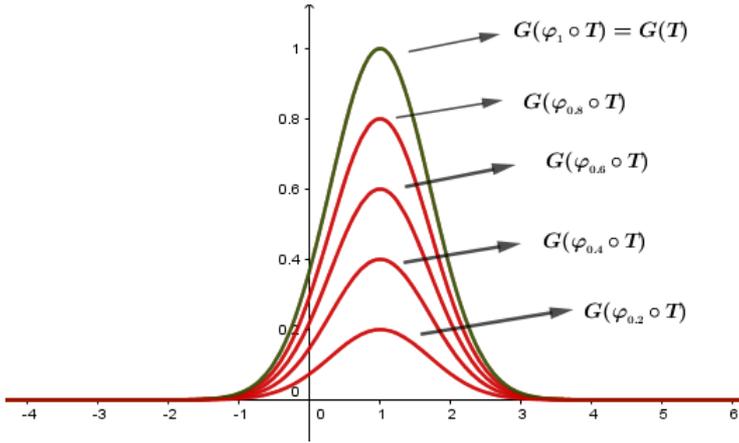
Demonstração É imediato, visto que $W = G(\varphi \circ T)$.

A relevância do Corolário 2.1 está no fato de que podemos obter novos espaços vetoriais a partir de um espaço vetorial tipo gráfico fixado, como veremos logo a seguir.

Exemplo 2.2 Um caso interessante é obtido quando X é um espaço vetorial e $\varphi : X \rightarrow X$ é uma homotetia.¹ Neste caso, o novo espaço vetorial $W = G(\varphi \circ T)$ é obtido a partir do espaço $G(T)$ via uma deformação homotética. Para visualizarmos essa situação, seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = e^{-(x-1)^2}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, os espaços vetoriais $W_\lambda = G(\varphi_\lambda \circ T)$ onde $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são as homotetias $\varphi_\lambda(x) = \lambda x$, são obtidos a partir de $G(T)$ via as deformações homotéticas. Na Figura 2.2 temos alguns casos particulares para λ .

¹A homotetia no plano euclidiano é um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma ente como segmentos, figuras, etc. No caso das figuras, seu tamanho é aumentado ou diminuído, mas as características principais, como a forma e os ângulos são mantidas. Um exemplo clássico é o caso de triângulos semelhantes.

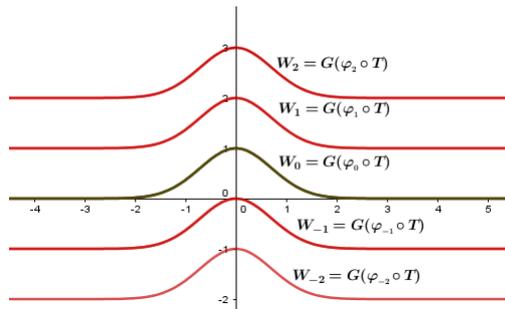
Figura 2.2: Espaços vetoriais obtidos a partir de $G(T)$, por homotetias



Fonte: Autores

Exemplo 2.3 Sejam $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = e^{-x^2}$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a translação definida por $\varphi(x) = x + k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, o espaço vetorial $W_k = G(\varphi_k \circ T)$ é obtido a partir do espaço inicial $W_o = G(T)$ via uma translação vertical. Podemos dizer que W_k é uma cópia do espaço $W_o = G(T)$. Veja a Figura 2.3.

Figura 2.3: Espaços vetoriais obtidos por translações verticais.

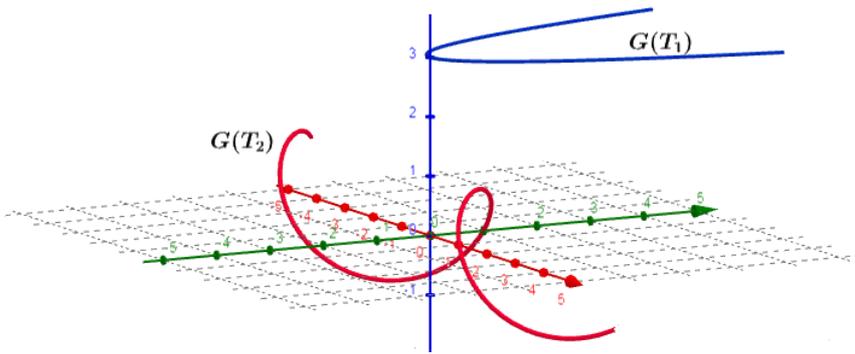


Fonte: Autores

Nosso próximo exemplo trata de espaços vetoriais unidimensionais ² no ambiente \mathbb{R}^3 . Ressaltamos que o caso das retas que passam pela origem de \mathbb{R}^3 , com suas operações usuais, são casos particulares.

Exemplo 2.4 Os subconjuntos $W_1 = \{(x, x^2, 3); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ e $W_2 = \{(x, \cos(x), \sin(x)); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, podem ser dotados com a estrutura de espaço vetorial dada pelo Teorema 2.1. Basta ver que $W_1 = G(T_1)$ e $W_2 = G(T_2)$, onde $T_1, T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ são definidas, respectivamente, por $T_1(x) = (x^2, 3)$ e $T_2(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Temos a descrição geométrica destes espaços na Figura 2.4.

Figura 2.4: Espaços vetoriais unidimensionais no ambiente \mathbb{R}^3 .



Fonte: Autores

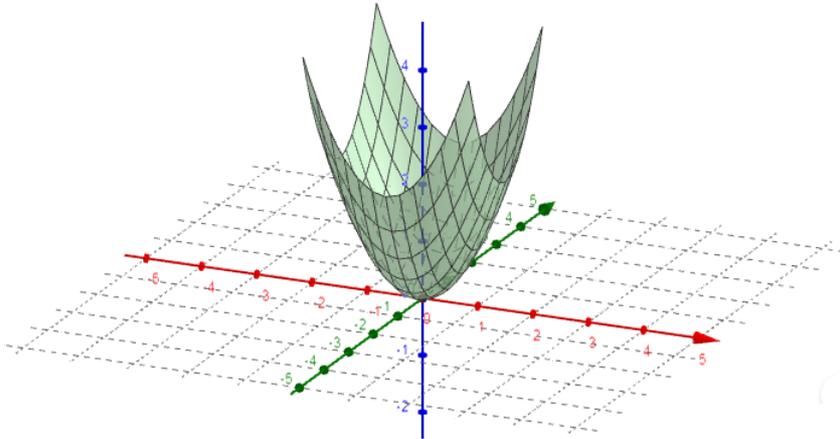
Ao considerarmos funções de duas variáveis reais podemos obter espaços bidimensionais no ambiente \mathbb{R}^3 com veremos a seguir.

Exemplo 2.5 O parabolóide $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\}$ pode ser dotado com a estrutura de espaço vetorial fornecida pelo Teorema 2.1. É imediato ver que $W = G(T)$ onde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

²Como é bem conhecido, os subespaços unidimensionais do \mathbb{R}^3 canônico (com suas operações usuais) são as retas que passam pelo ponto $(0,0,0)$. Com operações modificadas adequadamente, podemos ter retas do \mathbb{R}^3 que não passam por $(0, 0, 0)$, mas que sejam seus subespaços.

$T(x, y) = x^2 + y^2$. Geometricamente W está representado na Figura 2.5.

Figura 2.5: Espaço vetorial bidimensional parabolóide



Fonte: Autores

2.2 NOVAS ESTRUTURAS DE ESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO

Nesta seção apresentaremos novas estruturas de espaços vetoriais do tipo gráfico considerando bijeções no espaço domínio de uma aplicação. Em particular, utilizando translações, podemos obter estruturas nas quais o vetor nulo pode ser qualquer elemento do gráfico pré-fixado.

A respeito das novas estruturas de espaço vetorial para conjuntos do tipo gráfico, inspirados pelo trabalho de LOPES (2018), apresentamos o seguinte teorema.

Teorema 2.2

Seja $T : E \rightarrow X$ uma transformação e $\varphi : E \rightarrow E$ uma bijeção. Então, o conjunto

$$W = G(T) = \{(v, T(v)); v \in E\}$$

possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))))$$

$$\lambda \odot \mathbf{u} = (\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)))).$$

onde $\mathbf{u} = (u, T(u))$ e $\mathbf{v} = (v, T(v))$



Demonstração Vamos verificar que são satisfeitas as propriedades de espaços vetoriais.

Dados $\mathbf{u} = (u, T(u))$, $\mathbf{v} = (v, T(v))$ e $\mathbf{w} = (w, T(w))$ em $G(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

- Associatividade

Seja $z = [\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}] \oplus \mathbf{w}$. Então,

$$\begin{aligned} z &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\ &\quad \oplus (w, T(w)) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) + \varphi^{-1}(w)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) \\ &\quad + \varphi^{-1}(w))) \\ &= (u, T(u)) \oplus (\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(w)), T(\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(w)))) \\ &= (u, T(u)) \oplus [(v, T(v)) \oplus (w, T(w))] \\ &= \mathbf{u} \oplus [\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}]. \end{aligned}$$

- Comutatividade

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)); T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(u)))) \\ &= (v, T(v)) \oplus (u, T(u)) \\ &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}. \end{aligned}$$

- Existência de elemento neutro. Vamos mostrar que $(\varphi(0), T(\varphi(0)))$ é o elemento neutro de W . De fato:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \oplus (\varphi(0), T(\varphi(0))) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(\varphi(0))), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) \\ &\quad + \varphi^{-1}(\varphi(0)))) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + 0), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + 0))) \\ &= (u, T(u)) = \mathbf{u} \end{aligned}$$

- Existência de elemento simétrico.

Vamos mostrar que $(-\mathbf{u}) = (\varphi(-\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(-\varphi^{-1}(u))))$ é o elemento simétrico de $u \in W$. De fato:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(\varphi(-\varphi^{-1}(u))))), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) \\ &\quad + \varphi^{-1}(\varphi(-\varphi^{-1}(u))))) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(u)))) \\ &= (\varphi(0), T(\varphi(0))). \end{aligned}$$

- Associatividade

$$\begin{aligned} (\alpha.\beta) \odot \mathbf{u} &= (\varphi((\alpha.\beta).\varphi^{-1}(u)), T(\varphi((\alpha.\beta).\varphi^{-1}(u)))) \\ &= (\varphi(\alpha.(\beta.\varphi^{-1}(u))), T(\varphi(\alpha.(\beta.\varphi^{-1}(u))))) \\ &= \alpha \odot ((\varphi(\beta.\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\beta.\varphi^{-1}(u)))) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot (u, T(u))) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}). \end{aligned}$$

• Distributividade

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} &= (\varphi((\alpha + \beta) \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi((\alpha + \beta) \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \beta \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \beta \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) + \varphi^{-1}(\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u))), \\
 &\quad T(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) + \varphi^{-1}(\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &\quad \oplus (\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \beta \odot (u, T(u)) \\
 &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

• Distributividade

$$\begin{aligned}
 \alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \alpha \odot (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) \\
 &\quad + \varphi^{-1}(v))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot (\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))), T(\varphi(\alpha \cdot (\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \alpha \cdot \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \alpha \cdot \varphi^{-1}(v)))) \\
 &= (\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) + \varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v)))), \\
 &\quad T(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) + \varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &\quad \oplus (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v)))) \\
 &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \alpha \odot (v, T(v)) \\
 &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

• Multiplicação pela unidade.

$$1 \odot (u, T(u)) = (u, T(u)), \text{ para qualquer } (u, T(u)) \in W.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
 1 \odot (u, T(u)) &= (\varphi(1 \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(1 \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (\varphi(\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u)))) = (u, T(u)).
 \end{aligned}$$

Observe que, se considerarmos a construção dada por LOPES (2018), o Teorema 2.2 torna-se um caso especial do Teorema 2.1.

Corolário 2.2

Sejam $T : E \rightarrow X$ uma aplicação do espaço vetorial E no conjunto não-vazio X e $(v, T(v)) \in G(T)$ um elemento pré-fixado. Então, $G(T)$ possui uma estrutura de espaço vetorial na qual $(v, T(v))$ é o vetor nulo e o simétrico do vetor $(u, T(u))$ nessa estrutura é o vetor $(2v - u, T(2v - u))$.



Demonstração Basta ver que a translação $\varphi : E \rightarrow E$ definida por $\varphi(x) = x + v$ é uma bijeção e $\varphi(0) = v$. Além disso, temos que $\varphi(-\varphi^{-1}(u)) = \varphi(-(u - v)) = \varphi(v - u) = 2v - u$.

Na verdade, existem muitas estruturas de espaço vetorial para o gráfico $G(T)$ tais que o vetor nulo seja $(v, T(v))$.

Utilizando as funções seno e cosseno, apresentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.6 O conjunto $W = \{(x, y, \cos(x) + \sen(y) + 1) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é o gráfico da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = \cos(x) + \sen(y) + 1$. Com a estrutura dada pelo Teorema 2.1, o vetor nulo de W é o elemento $0 = (0, 0, 2)$ e o simétrico de $u = (x, y, \cos(x) + \sen(y) + 1)$ é o elemento $-u = (-x, -y, \cos(x) - \sen(y) + 1)$. Utilizando a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = 2(x, y) + (\pi, \pi)$ e o Teorema 2.2, obtemos uma outra estrutura de espaço vetorial para W cujas operações são dadas por

$$\begin{aligned}
 u \oplus v &= (x + z - \pi, y + w - \pi, -\cos(x + z) - \sen(y + w) + 1) \\
 \lambda \odot u &= ((1 - \lambda)\pi + \lambda x, (1 - \lambda)\pi + \lambda y, -\cos(\lambda(x - \pi)) \\
 &\quad - \sen(\lambda(y - \pi)) + 1),
 \end{aligned}$$

onde $u = (x, y, \cos(x) + \sen(y) + 1)$ e $v = (z, w, \cos(z) + \sen(w) + 1)$. Com esta nova estrutura, o vetor nulo de W é o elemento $(\pi, \pi, 0)$ e o simétrico de

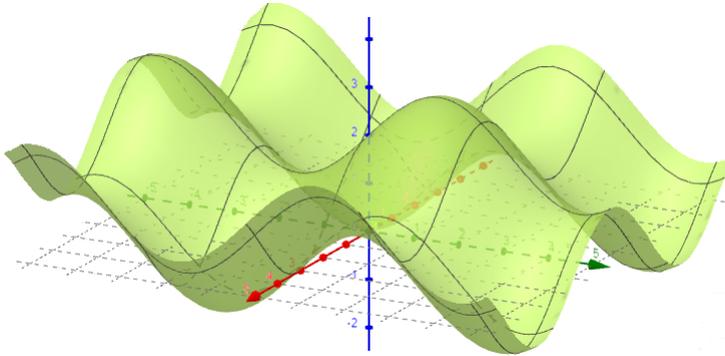
$$u = (x, y, \cos(x) + \sen(y) + 1)$$

é o elemento

$$-u = (2\pi - x, 2\pi - y, \cos(x) - \sin(y) + 1).$$

Na Figura 2.6 temos uma descrição geométrica de W .

Figura 2.6: Descrição geométrica do espaço W do Exemplo 2.6



Fonte: Autores

Exemplo 2.7 Seja

$$W = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - 1}) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(x, y, -2) / x^2 + y^2 < 1\}.$$

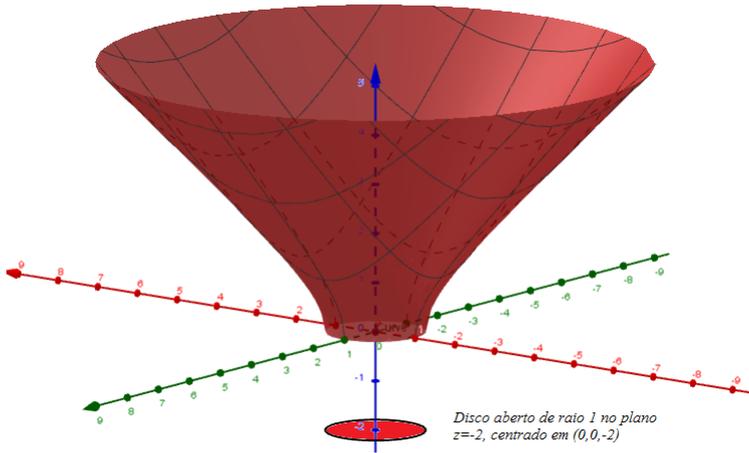
Veja que $W = G(T)$ onde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por

$$T(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, & x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ -2, & x^2 + y^2 - 1 < 0. \end{cases}$$

Geometricamente W está descrito na Figura 2.7.

Para obtermos uma estrutura de espaço vetorial em W na qual o vetor nulo seja $0 = (2, 3, 2\sqrt{3})$ vamos considerar a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja definição é dada por $\varphi(x, y) = (x + 2, y + 3)$. É claro que φ é bijetiva e $\varphi^{-1}(x, y) = (x - 2, y - 3)$. Utilizando a bijeção φ e o Teorema 2.2 obtemos

Figura 2.7: Descrição geométrica do espaço vetorial do Exemplo 2.2.2



Fonte: Autores

as seguintes operações em W .

$$(x, y, T(x, y)) \oplus (z, w, T(z, w)) = (x+z-2, y+w-3, T(x+z-2, y+w-3)).$$

$$\lambda \odot (x, y, T(x, y)) = (\lambda(x-2)+2, \lambda(y-3)+3, T(\lambda(x-2)+2, \lambda(y-3)+3)).$$

É imediato ver que, com essa estrutura, o vetor nulo de W é o vetor $0 = (2, 3, 2\sqrt{3})$.

Uma observação pertinente é que se $\varphi : E \rightarrow E$ é uma transformação linear então $\varphi(0) = 0$. Também segue da linearidade de φ que $\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) = u + v$ e $\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)) = \lambda u$. Isso mostra que a estrutura de espaço vetorial fornecida pelo Teorema 2.2 é invariante por transformações lineares. Além disso, a referida estrutura coincide com aquela fornecida pelo Teorema 2.1. Por outro lado, se $\varphi : E \rightarrow E$ é uma bijeção tal que $\varphi(0) = 0$ não podemos garantir a invariância da estrutura de espaço vetorial.

CAPÍTULO 3

SUBESPAÇOS VETORIAIS DO TIPO GRÁFICO E ORTOGONALIDADE

Neste capítulo vamos estudar os subespaços vetoriais de um espaço do tipo gráfico bem como alguns aspectos sobre a ortogonalidade entre eles.

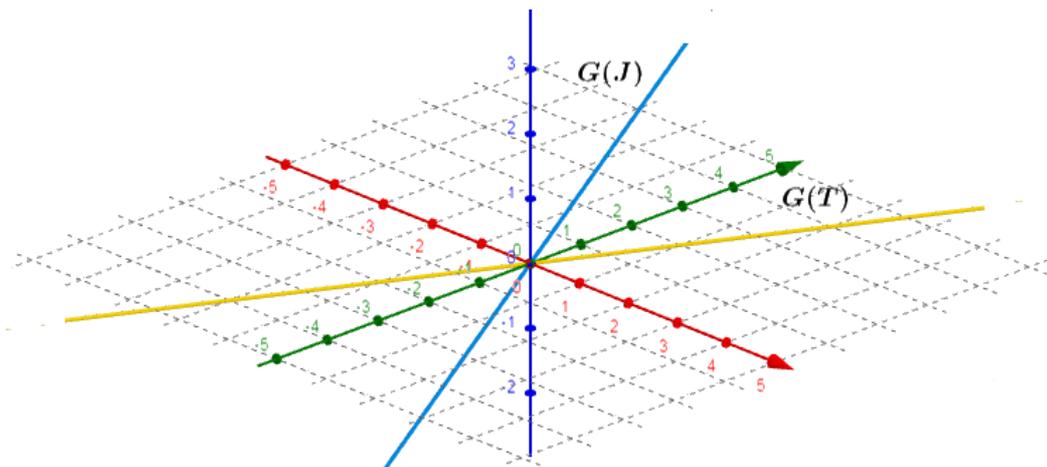
Como já sabemos da teoria da álgebra linear, se W é um subespaço não-trivial de um espaço vetorial de dimensão n e se s é a dimensão de W , então $s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. No caso de \mathbb{R}^n os subespaços de dimensão $s = 1$ são retas que passam pela origem. Ainda no caso de \mathbb{R}^n , se $s = 2$ então W é um plano que passa pela origem. Mas, o que podemos falar da geometria dos subespaços de espaços do tipo gráfico?

Vamos ressaltar aqui que os espaços do tipo gráfico que estamos estudando habitam em algum espaço \mathbb{R}^n . No entanto, em geral, eles não são subespaços de \mathbb{R}^n . Outro fato que destacamos é que os subespaços do espaço \mathbb{R}^n canônico, como por exemplo as retas e os planos, são gráficos de alguma aplicação. Assim, são casos particulares dos exemplos que construímos neste trabalho.

Exemplo 3.1 Neste exemplo destacamos subespaços unidimensionais. Note que $W = \{(x, 2x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço unidimensional do espaço \mathbb{R}^3 canônico. Além disso, W é um subespaço do tipo gráfico, pois $W = G(T)$ onde $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x) = (2x, 0)$. Por outro lado, $S = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do tipo gráfico, do \mathbb{R}^3 canônico, pois é o gráfico da aplicação $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $J(x) = (2x, 3x)$. Identificando \mathbb{R}^2 com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, vemos na Figura 3.1 uma descrição geométrica desses subespaços.

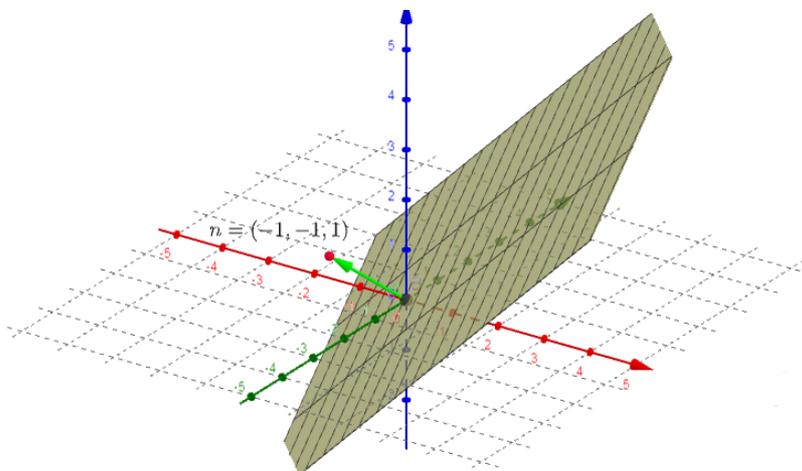
Exemplo 3.2 Em \mathbb{R}^3 um plano que passa pela origem é um subespaço vetorial. Por exemplo, o plano Π que passa pela origem $(0, 0, 0)$ e é ortogonal ao vetor $n = (-1, -1, 1)$ é o gráfico da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = -x - y$. Portanto, Π é um subespaço do \mathbb{R}^3 (canônico) do tipo gráfico. Veja a descrição de n e Π na Figura 3.2.

Figura 3.1: Subespaços unidimensionais do Exemplo 3.1



Fonte: Autores

Figura 3.2: Subespaço Π do Exemplo 3.2



Fonte: Autores

Para o nosso próximo exemplo vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 3.1

Dados números reais $a, b > 0$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $a^t = b$ se, e somente se, $1 \neq a > 0$.



O Lema 3.1 segue imediatamente da condição de existência do logaritmo, visto que $a^t = b \Leftrightarrow t = \log_a b$.

Exemplo 3.3 Vamos considerar o espaço vetorial visto no Exemplo 1.7, isto é, (V, \oplus, \odot) onde $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y > 0\}$. Recordamos que as operações em V são

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \quad (3.1)$$

$$\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, y^\alpha). \quad (3.2)$$

A título de curiosidade o vetor nulo desse espaço é o elemento $0 = (1, 1)$ e o simétrico de $v = (a, b)$ é $-v = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$.

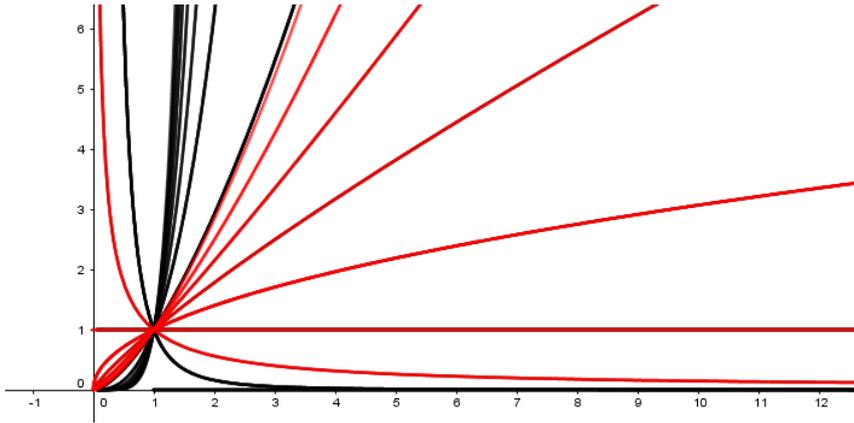
Vamos mostrar que apenas um dos subespaços (não-triviais) de V não é do tipo gráfico. Note que se $a = 1$ então $x \odot (a, b) = x \odot (1, b) = (1, b^x)$. Neste caso, $W_o = \{(1, y); y > 0\}$ é um subespaço de V gerado pelo elemento $(1, b)$ que não é do tipo gráfico. Porém, se $a \neq 1$, segue do Lema 3.1 que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $b = a^t$. Para esta situação,

$$x \odot (a, b) = x \odot (a, a^t) = (a^x, (a^t)^x) = (a^x, (a^x)^t).$$

Como $a > 0$ podemos fazer uma mudança de variável para obtermos que o subespaço de V gerado pelo elemento (a, b) é $W = \{(x, x^t); x > 0; t = \log_a b\}$. Para finalizar, basta ver que $W = G(f)$ onde $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^t$. Assim, com exceção de W_o , todos os subespaços não-triviais de V são do tipo gráfico. A Figura 3.3 ilustra alguns desses subespaços. Observe que na geometria do espaço V esses subespaços são retas passando pelo elemento $0 = (1, 1)$.

Note que, se olharmos os subespaços na forma $W = \{x, x^t\}; x > 0, t =$

Figura 3.3: Alguns subespaços de V



Fonte: Autores

$\log_a b\}$, obtemos subespaços que são gráficos de monômios mônicos. Por exemplo, se $t = 2$ então $W = \{x, x^2\}; x > 0\}$, é o gráfico da função com domínio \mathbb{R}_+^* definida por $f(x) = x^2$. Geometricamente W é uma parte de uma parábola na visão da geometria do \mathbb{R}^2 canônico e uma reta do ponto de vista de V .

Pelas construções dadas nos Teoremas 2.1 e 2.2, uma reta r que não passa pela origem $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 possui uma estrutura de espaço vetorial por ser o gráfico de alguma função T . Um questionamento pertinente é saber se o espaço vetorial $r = G(T)$ pode tornar-se um subespaço de \mathbb{R}^2 com operações de adição e multiplicação por escalar adequadas, isto é, subespaço de \mathbb{R}^2 com uma nova estrutura de espaço vetorial. No seguinte resultado mostramos que toda reta em \mathbb{R}^2 é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 , dotado, possivelmente, de uma nova estrutura. Observamos que LOPES (2018), apresenta uma nova estrutura de espaço vetorial para o conjunto \mathbb{R}^2 , utilizando bijeções. Com ideias similares, acrescentando aspectos sobre subespaços vetoriais, apresentamos o seguinte teorema.

Teorema 3.1

Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma bijeção. Então, as operações

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, \varphi(\varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(w))) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, \varphi(\lambda \varphi^{-1}(y)))\end{aligned}$$

definem uma nova estrutura de espaço vetorial para \mathbb{R}^2 . Além disso, tem-se que $W = \{(ax, \varphi(x\varphi^{-1}(b))) ; a, b \in \mathbb{R}\}$ torna-se um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$. Em particular, se $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $T(x) = \varphi(\frac{x}{a}\varphi^{-1}(b))$ com $a \neq 0$, então $W = G(T)$.



Demonstração A prova de que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial é essencialmente a mesma dada por LOPES (2018). Resta verificar que W é subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$. Dados $u = (ax, \varphi(x\varphi^{-1}(b)))$ e $v = (az, \varphi(z\varphi^{-1}(b)))$ em W temos que:

i) $u \oplus v = (ax + az, \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x\varphi^{-1}(b)))) + \varphi^{-1}(\varphi(z\varphi^{-1}(b))))$
 $= (ay, \varphi(y\varphi^{-1}(b))) \in W$, onde $y = x + z$.

ii) $\lambda \odot u = (\lambda ax, \varphi(\lambda \varphi^{-1}(\varphi(x\varphi^{-1}(b)))) = (a\lambda x, \varphi(\lambda x \varphi^{-1}(b))) \in W$.

Isso encerra a prova.

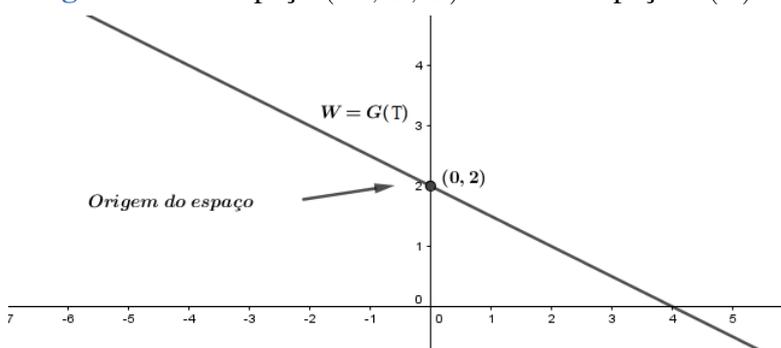
Exemplo 3.4 Seja \mathbb{R}^2 com as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalar definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, y + w - 2) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, \lambda(y - 2) + 2).\end{aligned}$$

Essas operações foram construídas utilizando-se o Teorema 3.1 e a bijeção $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = x + 2$. Note que o vetor nulo de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é o elemento $0 = (0, 2)$. Na Figura 3.4 a seguir vemos o espaço $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ e seu subespaço $W = G(T)$ onde $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $T(x) = -\frac{x}{2} + 2$.

Exemplo 3.5 Seja $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x^3 + 2$. O gráfico $G(T)$ é um espaço vetorial com as operações adequadas, mas $G(T)$ não é subespaço de \mathbb{R}^2 com as operações usuais. No entanto, fazendo uso do Teorema 3.1,

Figura 3.4: O espaço $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ e seu subespaço $G(T)$.



Fonte: Autores

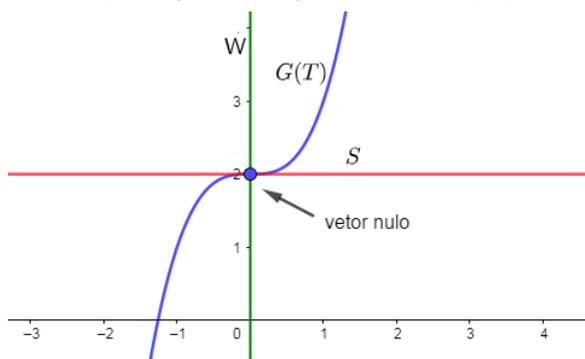
$G(T)$ torna-se um subespaço de \mathbb{R}^2 com as operações definidas por

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, ((\sqrt[3]{y-2} + \sqrt[3]{w-2})^3 + 2)) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, \lambda^3(y-2) + 2).\end{aligned}$$

É fácil ver que o subespaço W gerado por qualquer elemento da forma $(0, b)$ com $b \neq 2$ é o eixo dos y . Por outro lado, se (a, b) é um elemento com $a \neq 0$, então $x \odot (a, b) = (ax, x^3(b-2) + 2)$. Isso, significa que o subespaço gerado pelo elemento (a, b) é gráfico da aplicação $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \frac{(b-2)}{a^3}x^3 + 2$. Note ainda que se $b = 2$ e $a \neq 0$ então obtemos a aplicação $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x) = 2$. Neste caso, $G(H) = S$ é a reta, no sentido usual, que passa pelo ponto $(0, 2)$ e é paralela ao eixo dos x . Por outro lado, se $(a, b) = (1, 3)$ então $H(x) = G(T)$. A Figura 3.5 mostra o espaço $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ e seus subespaços W, S e $G(T)$.

Utilizando as ideias de LOPES (2018) podemos modificar a estrutura de espaço vetorial de \mathbb{R}^2 considerando diferentes bijeções $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sendo assim, o formato de seus subespaços vetoriais dependem da aplicação T . Na verdade, as ideias de LOPES (2018) estão sustentadas pelo teorema do isomorfismo entre espaços vetoriais.

Figura 3.5: O espaço $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ e seus subespaços W, S e $G(T)$



Fonte: Autores

No exemplo a seguir vamos estudar subespaços do parabolóide dado no Exemplo 2.5. Afinal, geometricamente o que são esses subespaços?

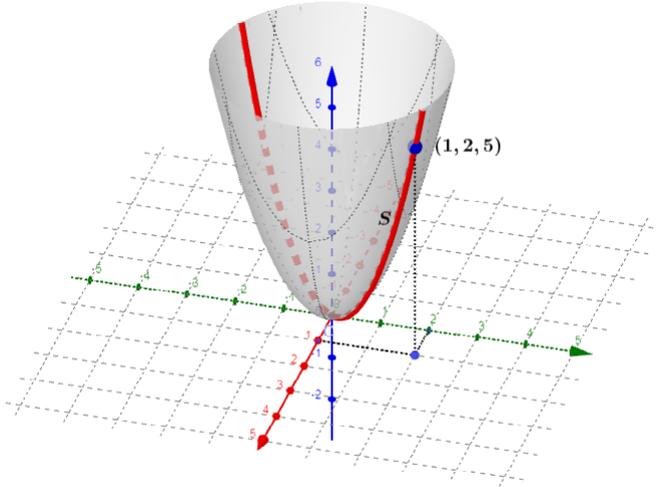
Exemplo 3.6 Vamos considerar o parabolóide $W = \{(x, y, x^2 + y^2); x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações definidas pelo Teorema 2.1. Como W possui dimensão $n = 2$, seus subespaços não-triviais possuem dimensão $s = 1$. Se $u = (a, b, a^2 + b^2)$ é um vetor não-nulo em W , então o subespaço S gerado por u é dado por $S = \{x \odot u; x \in \mathbb{R}\}$. Vamos procurar entender o que é, geometricamente, o subespaço S . Note que

$$x \odot u = x \odot (a, b, a^2 + b^2) = (ax, bx, (a^2 + b^2)x^2).$$

Geometricamente temos dois pontos de vista a considerar: do ponto de vista de W , S é a reta que passa pelos pontos $0 = (0, 0, 0)$ e $A = (a, b, a^2 + b^2)$. Do ponto de vista do ambiente \mathbb{R}^3 , S é uma parábola. Por exemplo, se $A = (1, 2, 5) \in W$, então $S = \{(x, 2x, 5x^2); x \in \mathbb{R}\}$ é uma parábola no \mathbb{R}^3 canônico. No entanto, do ponto de vista de W , é a reta que passa na origem de W e pelo ponto $(1, 2, 5)$, visto que $(1-x) \odot (0, 0, 0) \oplus x \odot (1, 2, 5) = ((1-x) \cdot 0, (1-x) \cdot 0, 0 \cdot (1-x)^2) \oplus (x, 2x, 5x^2) = (x, 2x, 5x^2)$, de modo que $S = \{(1-x) \odot (0, 0, 0) \oplus x \odot (1, 2, 5); x \in \mathbb{R}\}$.

Isso está em consonância com a Definição 1.6. Na Figura 3.6 temos uma descrição geométrica de S .

Figura 3.6: Descrição geométrica do subespaço S



Fonte: Autores

O subespaço S também é do tipo gráfico, pois $S = G(h)$ onde h é a restrição da função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x^2 + y^2$, ao conjunto $D = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$.

De modo geral, os subespaços de dimensão $s = 1$ em um espaço do tipo gráfico são retas passando pela origem do espaço, assim como acontece nos espaços \mathbb{R}^n .

Para o nosso próximo resultado vamos considerar um espaço vetorial $(E, +, \cdot)$ e $\varphi : E \rightarrow E$ uma bijeção. Conforme pode ser visto em LOPES (2018), as operações \boxplus e \boxminus definidas em E por

$$u \boxplus v = \varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) \quad (3.3)$$

$$\lambda \boxminus u = \varphi(\lambda \varphi^{-1}(u)) \quad (3.4)$$

tornam (E, \boxplus, \boxminus) um novo espaço vetorial. Neste contexto, as operações definidas para $G(T)$ no Teorema 2.2 tornam-se $(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) = (u \boxplus v, T(u \boxplus v))$ e $\lambda \odot (u, T(u)) = (\lambda \boxminus u, T(\lambda \boxminus u))$. No seguinte teorema estaremos considerando $G(T)$ com as operações \boxplus e \boxminus em conformidade com o Teorema 2.2, estando implícita a bijeção $\varphi : E \rightarrow E$.

Teorema 3.2

Sejam $T : E \rightarrow X$ uma aplicação do espaço vetorial $(E, +, \cdot)$ no conjunto não-vazio X e $W = G(T)$ um espaço vetorial do tipo gráfico. Então, S é subespaço vetorial de W se, e somente se, $\pi_1(S)$ é subespaço vetorial de (E, \boxplus, \boxminus) .

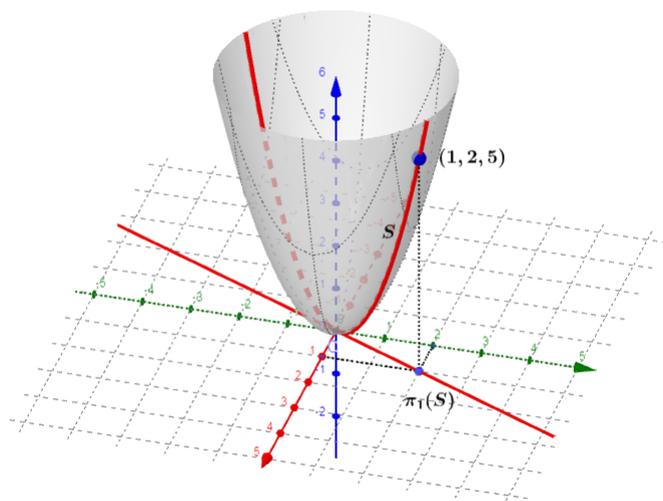


Demonstração Suponha que S seja subespaço vetorial de $W = G(T)$. Se $u, v \in \pi_1(S)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $(u, T(u)), (v, T(v)) \in S$. Como S é subespaço vetorial de W , segue que $(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) = (u \boxplus v, T(u \boxplus v)) \in S$, isto é, $u \boxplus v \in \pi_1(S)$. Analogamente, $\lambda \boxminus u \in \pi_1(S)$. Portanto, $\pi_1(S)$ é subespaço vetorial de (E, \boxplus, \boxminus) . Reciprocamente, se $\pi_1(S)$ é subespaço vetorial de (E, \boxplus, \boxminus) então, dados $w_1, w_2 \in S$, existem $u, v \in E$ tais que $w_1 = (u, T(u))$ e $w_2 = (v, T(v))$. Segue que $u, v \in \pi_1(S)$ e como $\pi_1(S)$ é subespaço vetorial de (E, \boxplus, \boxminus) , resulta que $u \boxplus v \in \pi_1(S)$ e portanto obtemos que $(u \boxplus v, T(u \boxplus v)) \in S$. De modo similar obtemos que $(\lambda \boxminus u, T(\lambda \boxminus u)) \in S$. Isso conclui a prova da teorema.

Exemplo 3.7 Na Figura 3.7 temos uma descrição do subespaço $S = [(1, 1, 2)]$ do parabolóide descrito no Exemplo 2.5 e o subespaço $\pi_1(S)$ do espaço \mathbb{R}^2 .

3.1 SUBESPAÇOS ORTOGONAIS

Dada uma aplicação $T : E \rightarrow X$ do espaço vetorial E no conjunto não-vazio X , podemos introduzir um produto interno no espaço vetorial $G(T)$ desde que o espaço E esteja munido de um produto interno. Após introduzirmos esse produto interno vamos estudar os subespaços ortogonais de $G(T)$.

Figura 3.7: Um subespaço S tipo gráfico e sua projeção $\pi_1(S)$ 

Fonte: Autores

Seja E um espaço vetorial com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G(T)} : G(T) \times G(T) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle (u, T(u)), (v, T(v)) \rangle_{G(T)} = \langle u, v \rangle_E$ define um produto interno em $G(T)$. Vamos chamar esse produto interno de produto interno induzido.

Antes de enunciar e provar nosso próximo resultado vamos colocar em forma de lema um fato provado em LOPES (2018).

Lema 3.2

Seja $\varphi : E \rightarrow E$ uma bijeção e (E, \boxplus, \boxminus) a nova estrutura de espaço vetorial em E construída via φ de acordo com as equações (3.3) e (3.4). Se $0 \in (E, +, \cdot)$ então $\varphi(0)$ é o vetor nulo de (E, \boxplus, \boxminus) .



Proposição 3.1

Sejam $E = (E, +, \cdot)$ um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e $\varphi : E \rightarrow E$ uma bijeção. Se $\mathbf{E} = (E, \boxplus, \boxminus)$ é o espaço vetorial cujas operações estão definidas pelas equações (3.3) e (3.4), então a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle u, v \rangle_{\mathbf{E}} := \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle_E$ para quaisquer $u, v \in \mathbf{E}$, define um produto interno em \mathbf{E} . 

Demonstração Sejam $u, v, w \in \mathbf{E}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

i)

$$\begin{aligned} \langle u \boxplus v, w \rangle_{\mathbf{E}} &= \langle \varphi^{-1}(u \boxplus v), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}[\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))], \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E + \langle \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle u, w \rangle_{\mathbf{E}} + \langle v, w \rangle_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \langle \lambda \boxminus u, w \rangle_{\mathbf{E}} &= \langle \varphi^{-1}(\lambda \boxminus u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}[\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(u))], \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \lambda \cdot \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \lambda \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \lambda \langle u, w \rangle_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle_{\mathbf{E}} &= \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}(w), \varphi^{-1}(u) \rangle_E \\ &= \langle w, u \rangle_{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

iv)

$$\langle u, u \rangle_{\mathbf{E}} = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(u) \rangle_E \geq 0$$

e

$$\langle u, u \rangle_{\mathbf{E}} > 0 \Leftrightarrow \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(u) \rangle_E > 0 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(u) \neq 0 \Leftrightarrow u \neq 0.$$

Para a última equivalência foi utilizado o Lema 3.1. Portanto, as propriedades de produto interno são verificadas e a proposição está demonstrada.

Se $G(T)$ possui um produto interno induzido, o que podemos dizer sobre a ortogonalidade entre seus subespaços? A respeito desse questionamento temos o seguinte teorema.

Teorema 3.3

Seja E um espaço vetorial com produto interno e $T : E \rightarrow X$ uma aplicação. Os subespaços W_1 e W_2 são ortogonais em $G(T)$ com respeito ao produto interno induzido se, e somente se, $\pi_1(W_1)$ e $\pi_1(W_2)$ são ortogonais em E .



Demonstração Pelo Teorema 3.2 para cada $i = 1, 2$, W_i é subespaço vetorial de $G(T)$ se, e somente se, $\pi_1(W_i)$ é subespaço vetorial de E . O resultado segue da definição de produto interno induzido.

No próximo exemplo dotamos o espaço \mathbb{R}^2 de uma nova estrutura de espaço vetorial utilizando uma translação. Essa nova estrutura é utilizada para munir o parabolóide de uma estrutura de espaço vetorial. Com essas estruturas o vetor nulo de \mathbb{R}^2 passará a ser o elemento $(0, 1)$ enquanto o vetor nulo do parabolóide passará a ser o elemento $(0, 1, 1)$. Por fim, estudaremos no referido exemplo, os subespaços vetoriais ortogonais.

Exemplo 3.8 Sejam $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ o espaço \mathbb{R}^2 com as operações usuais dotado do produto interno usual e $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a bijeção dada por $\varphi(x, y) = (x, y) + (0, 1)$. A bijeção φ define uma nova estrutura de espaço vetorial no conjunto \mathbb{R}^2 através das operações:

$$\begin{aligned} (x, y) \boxplus (z, w) &= (x + z, y + w - 1) \\ \lambda \boxtimes (x, y) &= (\lambda x, \lambda(y - 1) + 1). \end{aligned}$$

Considere em $(\mathbb{R}^2, \boxplus, \boxtimes)$ o produto interno de dado na Proposição 3.1, isto

é, $\langle (x, y), (z, w) \rangle_{\mathbb{R}^2} = xz + (y - 1)(w - 1)$. Seja o espaço vetorial $G(T)$, gráfico da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x^2 + y^2$. Vamos considerar $G(T)$ com as operações

$$\begin{aligned} (x, y, T(x, y)) \oplus (z, w, T(z, w)) &= ((x, y) \boxplus (z, w), T((x, y) \boxplus (z, w))) \\ \lambda \odot (x, y, T(x, y)) &= (\lambda \boxdot (x, y), T(\lambda \boxdot (x, y))). \end{aligned}$$

Note que o vetor nulo de $(\mathbb{R}^2, \boxplus, \boxdot)$ é o elemento $(0, 1)$ e o vetor nulo de $(G(T), \oplus, \odot)$ é o elemento $(0, 1, 1)$. Se W_1 é o subespaço de $G(T)$ gerado pelo elemento $(1, 1, 2)$, então

$$W_1 = \{(x, 1, x^2 + 1); x \in \mathbb{R}\}.$$

Do Teorema 3.3, $\pi_1(W_1) = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $(\mathbb{R}^2, \boxplus, \boxdot)$. O subespaço S ortogonal a $\pi_1(W_1)$ em \mathbb{R}^2 é dado por $S = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$. Ainda com as ideias do Teorema 3.3, obtemos que o subespaço W_2 de $G(T)$ ortogonal a W_1 é dado por

$$W_2 = \{(0, y, T(0, y)); y \in \mathbb{R}\} = \{(0, y, y^2); y \in \mathbb{R}\}.$$

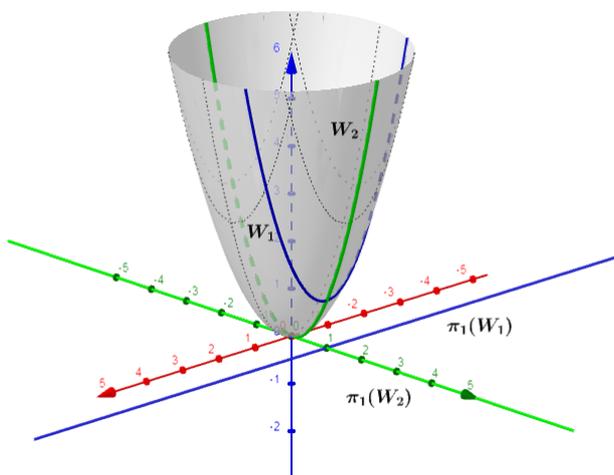
Note que

$$\langle (x, 1, x^2 + 1), (0, y, y^2) \rangle_{G(T)} = x \cdot 0 + (1 - 1)(y - 1) = 0.$$

Identificando S com $S \times \{0\}$ e $\pi_1(W)$ com $\pi_1(W) \times \{0\}$, vemos na Figura 3.8, uma descrição desses subespaços. ¹

¹Vale destacar que na literatura corrente uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um vetor do espaço infinito-dimensional $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Nosso trabalho muda totalmente o foco e destaca, em particular, o gráfico de cada função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como um espaço vetorial de dimensão finita.

Figura 3.8: Subespaços ortogonais no parabolóide



Fonte: Autores

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. Além disso, mostramos a possibilidade de munir o mesmo gráfico com muitas estruturas de espaços vetoriais. Em particular, o vetor nulo pode ser reescalado para ser qualquer elemento. Nossos exemplos foram construídos utilizando os ambientes \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Os exemplos podem ser generalizados para qualquer dimensão finita. Além disso, mostramos que retas que não passam pelo elemento $(0, 0)$ (ou $(0, 0, 0)$) podem ser subespaços, com as operações adequadas. A mesma discussão pode ser estendida para os espaços \mathbb{R}^n . Por fim, introduzimos um produto interno em espaços do tipo gráfico e analisamos os subespaços ortogonais em gráficos deste trabalho.

Apresentamos alguns casos particulares de subespaços do tipo gráfico de dimensão 1. Esses subespaços são casos particulares de retas nos correspondentes espaços vetoriais ao consideramos a Definição 1.6.

As retas minimizam a distância nos espaços vetoriais \mathbb{R}^n canônicos. E nos espaços vetoriais do tipo gráfico, as retas minimizam a distância? A questão de minimizar distâncias, localmente ou globalmente, é um tema bem conhecido da Geometria diferencial de superfícies. As curvas que minimizam distâncias são chamadas *geodésicas* e existe uma teoria bem determinada para encontrar tais geodésicas. Por exemplo, as geodésicas de uma esfera são grandes círculos, tais como o equador ou o meridiano. As variedades Riemannianas formam uma classe de objetos matemáticos que são, em certo sentido, parecidos com os espaços \mathbb{R}^n e que são dotadas de uma métrica, isto é, uma aplicação com propriedades similares às de um produto interno. Como já podem desconfiar, a distância depende da maneira que escolhemos para medir. Na teoria dos espaços métricos essa situação já é bem conhecida. No mesmo ambiente podemos ter diferentes maneiras de medir. A questão de saber em que situações retas em espaços vetoriais minimizam distâncias é bastante sutil e pode depender do ponto de vista a ser adotado. Acreditamos que o trabalho realizado até aqui será útil em cursos de graduação e deixamos a discussão sobre as retas e distâncias para um estudo posterior.

Bibliografia

DORIER, J. L. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, n. 22, p. 227–21, 1995. Citado na página 2.

GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. [S.l.]: Projeto Euclides IMPA, 2000. Citado na página 4.

LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 9.

LOPES, T. A. *Uma conexão entre a álgebra linear e a teoria dos conjuntos*. Rio Claro: PROFMAT Universidade Estadual Paulista, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 2, 20, 24, 30, 31, 32, 34 e 36.

NAVECA, K. D. A. *Espaços vetoriais do tipo gráfico e uma sequência didática para o ensino médio*. Dissertação (mathesis) — PROFMAT UFRR, Boa Vista, RR, abr. 2021. Citado na página 3.

RORRES, A. H. C. *Álgebra linear com aplicações*. 10. ed. Prto Alegre: Bookman, 2012. Citado na página 4.

RUFINO, E. O. N. K. A. D. Novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. *Revista de Ciência e Tecnologia - RCT - UFRR*, 2021. Citado na página 3.

WINTERLE, A. S. P. *Álgebra linear*. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.

Sobre os autores

Elzimar de Oliveira Rufino

É Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM - 2016) Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM- 2009), Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Roraima (UFRR-2004) e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Roraima (UFRR-1999). É professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima desde dezembro de 2004. Atualmente também atua como professor no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

Kayo Denner Alves Naveca

É Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, (PROFMAT-UFRR-2021) e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Roraima. Atualmente atua como professor na Escola Fundação Bradesco - RR.